

# VI. Robotermodellierung II

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann

- Übungsblatt ist online
  - Vorlesung am 15.12: Besprechung des Übungsblatts
  - Keine Abgabe / Bewertung!
- Inhalt
  - Rotationsmatrizen (weiterführende Information)
  - Denavit-Hartenberg
  - Vorwärtskinematik
  - Rückwärtskinematik

## Robotermodellierung

- Geometrische Modellierung  
Geometrie:  
mathematische Beschreibung der Form von Körpern
- Kinematische Modellierung  
Kinematik:  
Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme
- Dynamische Modellierung  
Dynamik:  
Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

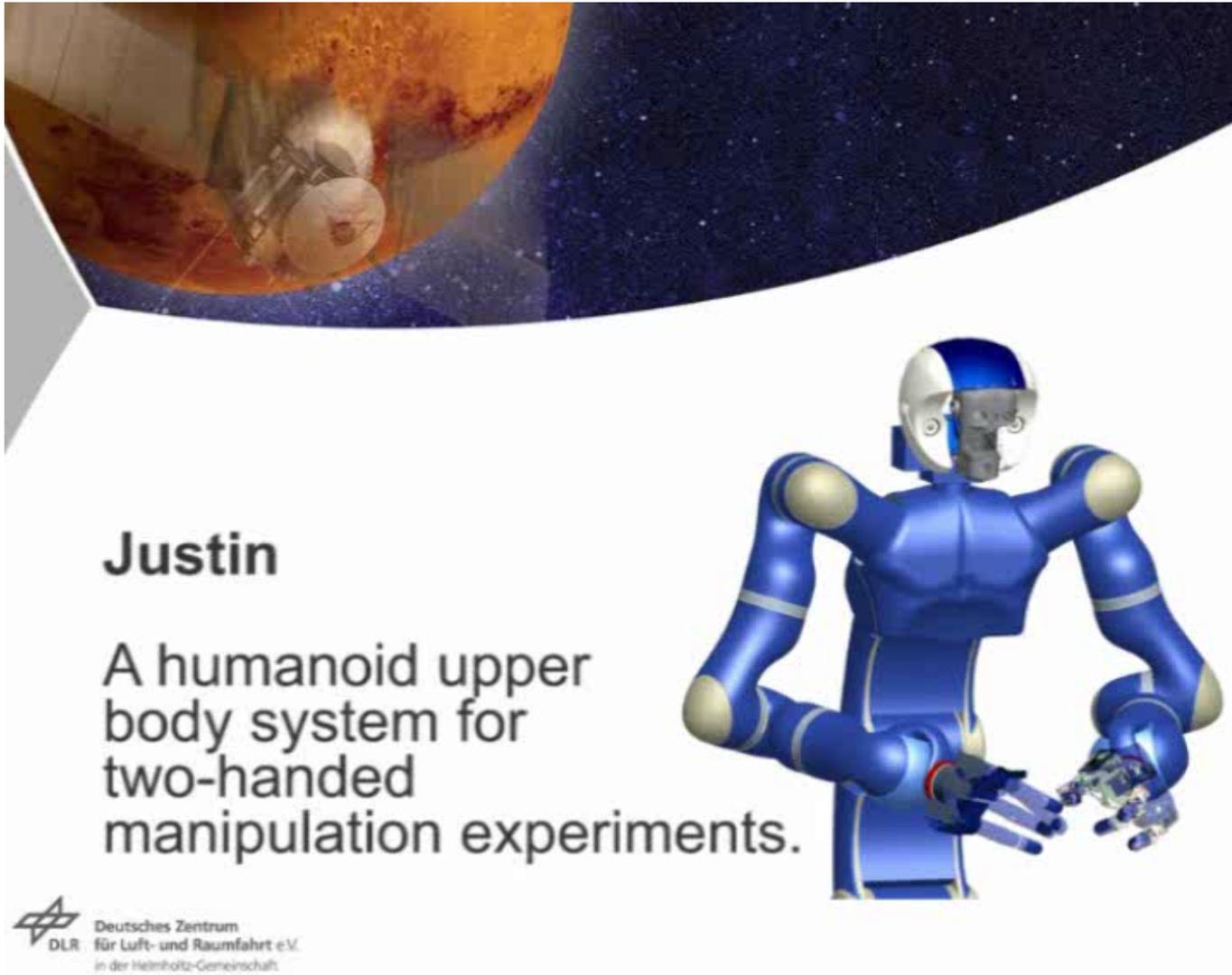
- **Dynamisches Modell**
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

## Definition

Das dynamische Modell berechnet den Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten.

## Zweck des dynamischen Modells

- Analyse der Dynamik
- Synthese mechanischer Strukturen
- Modellierung elastischer Strukturen
- Reglerentwurf

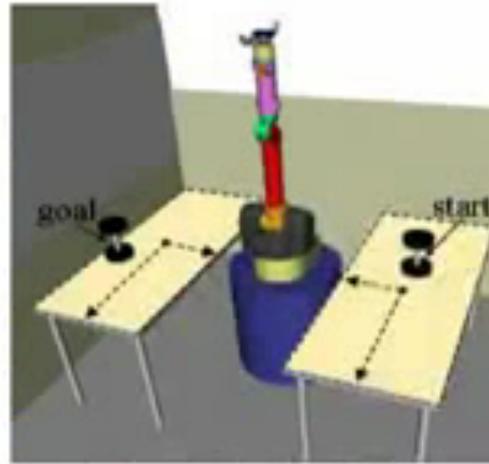


**Justin**

A humanoid upper body system for two-handed manipulation experiments.

 Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

## Moving a Heavy Dumbbell with Sliding



Task: Move the dumbbell from one table to the other.

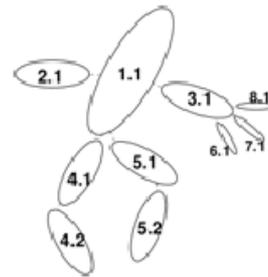
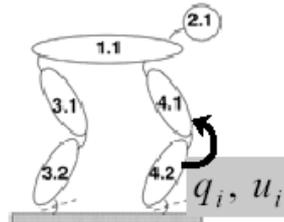
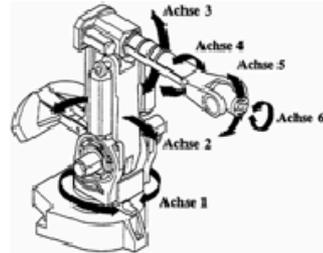
Constraints:

1. Stay within torque limits of arm for dumbbell mass  $w$ .
2. Sliding the dumbbell is allowed.

<https://personalrobotics.ri.cmu.edu/projects/cplan.php>

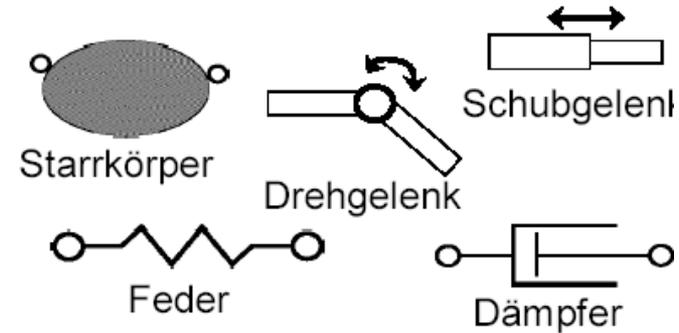
<http://www.youtube.com/watch?v=APAhs7GC090>

## Modellierung der Roboterdynamik

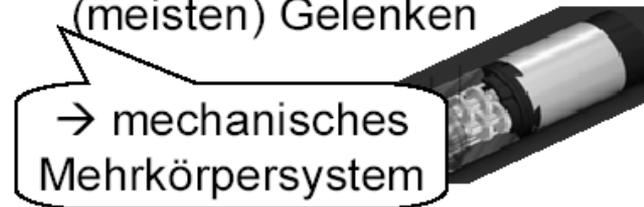


### Mechanischer Aufbau:

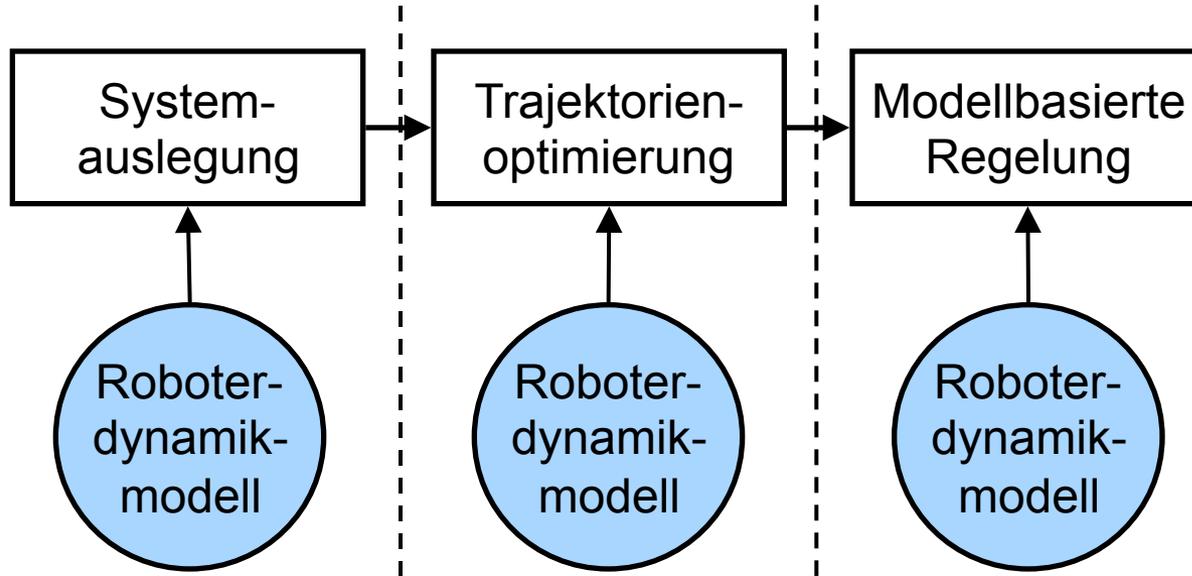
- über Gelenke gekoppelte Teilkörper, z.B.



- Antriebe in den (meisten) Gelenken



## Anwendung dynamischer Modellierung



### Phasen von Roboter-Entwicklung und -Betrieb

- Getrennte Modellierung in unterschiedlichen Phasen
- Hoher Zeitaufwand, Fehler und Inkonsistenzen wahrscheinlich
- Wiederverwendbarkeit des dynamischen Modells schwierig bei Änderungen (kinem. Struktur, Gelenke, Antriebe)

## Generalisierte Koordinaten

### Definition:

Reduzierter Satz von Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt. Alle Koordinaten des Satzes sind voneinander unabhängig.

### Beispiel:

Lage von  $N$  Massepunkten im Kartesischen Raum (Allgemeine Koordinaten):

$$\mathbf{R} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \Rightarrow 3N \text{ Koordinaten}$$

Generalisierte Koordinaten sind Gelenkwinkelstellungen:

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_K) = (\theta_1, \dots, \theta_K) \Rightarrow K \text{ Koordinaten}$$

Generalisierte Koordinaten berücksichtigen alle Zwangsbedingungen des Systems.

## Bewegungsgleichung

Im dynamischen Modell werden die Beziehungen zwischen Kräften/ Momenten und den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente dargestellt.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$\mathbf{Q}$  :  $n \times 1$  Vektor der Stellkräfte und –momente (**Generalisierte Kräfte**)

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$  :  $n \times n$  Massenträgheitsmatrix

$\mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  :  $n \times 1$  Vektor mit Zentrifugal- und Corioliskomponenten

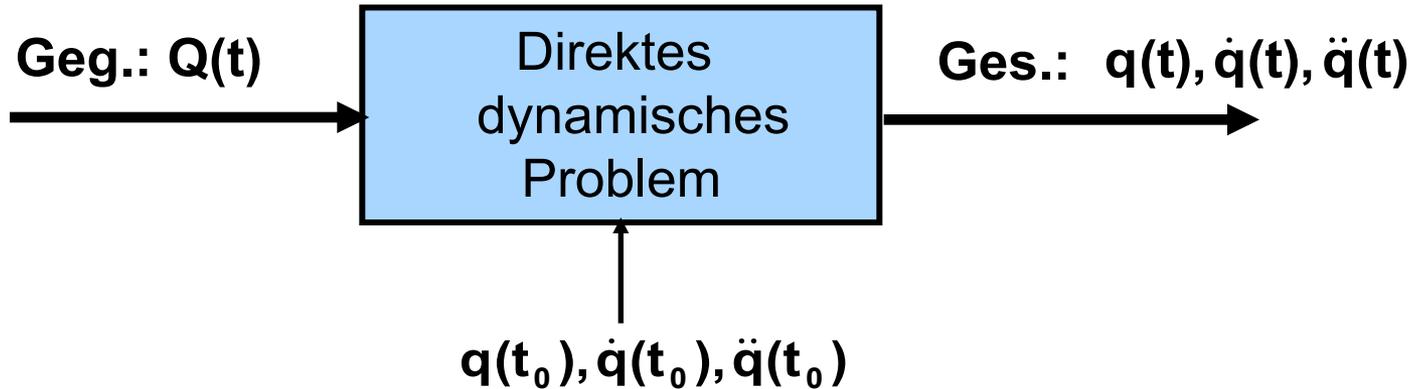
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$  :  $n \times 1$  Vektor mit Gravitationskomponenten

$\mathbf{R}$  :  $n \times n$  Diagonalmatrix zur Beschreibung der Reibungskräfte

$\mathbf{q}$  :  $n \times 1$  Winkellagen des Manipulators

## Direktes dynamisches Problem

Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand wird unter Verwendung des dynamischen Modells die sich ergebenden Bewegungsänderung berechnet.

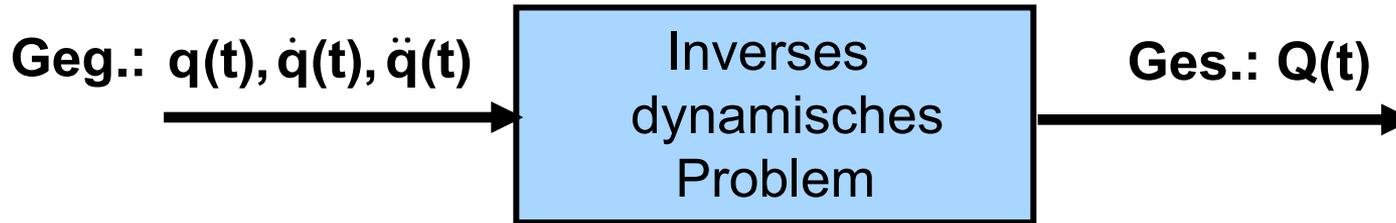


$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (*)$$

⇒ Gleichung (\*) auflösen nach  $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$

## Inverses dynamisches Problem

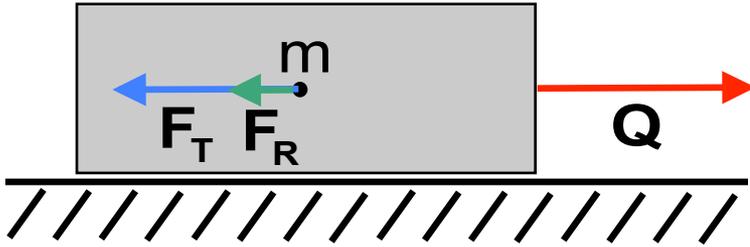
Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und Stellmomente ermittelt werden.



$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (*)$$

⇒ Gleichung (\*) ausrechnen

## Beispiel



$$F_T = -m\ddot{x} \quad \text{Trägheit}$$

$$F_R = -K_{GR}\dot{x} \quad \text{Gleitreibung}$$

$$Q \quad \text{Externe Kraft}$$

Kräftebilanz:  $Q = -(F_T + F_R)$

Bewegungsgleichung:  $Q = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$

**Direktes Problem:** gegeben externe Kraft  $Q$ , und aktueller Bewegungszustand, berechne neue Beschleunigung und Geschwindigkeit.

**Inverses Problem:** gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft  $Q$  wirkt auf das System.

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

## Lösungsmöglichkeiten

- Analytische Methode (Lagrange)
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
  - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen
- Synthetische Methode (Newton-Euler)
  - Freikörperbild (Freischneiden)
  - Impuls- und Drallsatz
  - Elimination der Zwangskräfte

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

## Bewegungsgleichung nach Lagrange

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

\*

mit der Lagrange-Funktion:

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

Vorraussetzung:

- $q_k$  sind generalisierte Koordinaten unter Berücksichtigung aller Zwangsbedingungen

## Modellierung mit Lagrange

### Ziel:

Ermittle für jedes Gelenk  $i$  eines Roboters  
Bewegungsgleichung gemäß:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

### Vorgehen:

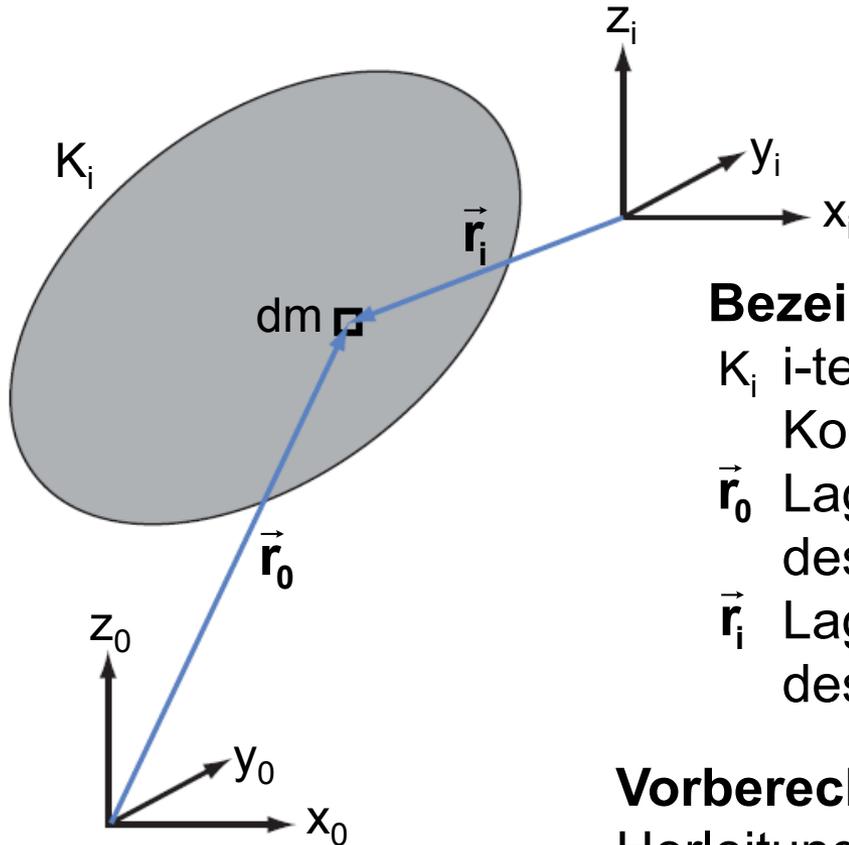
- Berechne  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$
- Drücke  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$  in generalisierten Koordinaten aus

$$\Rightarrow L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

- Berechne Ableitungen  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$ ,  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$

⇒ Bewegungsgleichung

## Geometrische Vorbetrachtung (I)



### Bezeichnungen:

$K_i$   $i$ -tes Armelement starr verbunden mit Koordinatensystem  $i$

$\vec{r}_0$  Lage eines Massepunktes  $m$  bezüglich des Basiskoordinatensystems

$\vec{r}_i$  Lage eines Massepunktes  $m$  bezüglich des  $i$ -ten Koordinatensystems

### Vorbereitung:

Herleitung der Positionsänderung des Massepunktes aus generalisierten Koordinaten.

$\dot{\vec{r}}_0$

## Geometrische Vorbetrachtung (II)

Aus DH-Matrizen:  $\vec{r}_0 = \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i$

Ableitung mit Produktregel:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_0 = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i + \mathbf{A}_{0,1} \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i + \cdots + \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}^{\mathbf{A}_{i-1,i}}(\mathbf{q}_i(t))$$

## Geometrische Vorbetrachtung (III)

Ableitung mit Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}^{\mathbf{A}}_{i-1,i}(\mathbf{q}_i(t)) = \frac{d}{dq_i} \mathbf{f}^{\mathbf{A}}_{i-1,i} \frac{d}{dt} q_i$$

$$\frac{d}{dq_i} \mathbf{f}^{\mathbf{A}}_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i-1,i} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{O}_R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bewegungsänderung  
des Gelenks

Transformation in  
aktuelle  
Gelenkstellung

Rotationsgelenk

$$\mathbf{O}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Translationsgelenk

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{A}_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i-1,i} \dot{q}_i \quad (3)$$

## Geometrische Vorbetrachtung (IV)

Mit (2) und (3) folgt:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_0 = \mathbf{O}_{0,1} \mathbf{A}_{0,1} \dot{q}_1 \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{A}_{i-1,i} \vec{r}_i + \cdots + \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{O}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i-1,i} \dot{q}_i \vec{r}_i \quad (4)$$

Darstellung der Bewegung eines Massepunktes in Abhängigkeit der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten.

Definiere Produktmatrix:

$$\mathbf{P}^{j,i} = \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{A}_{1,2} \cdots \mathbf{O}_{j-1,j} \mathbf{A}_{j-1,j} \cdots \mathbf{A}_{i-1,i}$$

i: Anzahl Freiheitsgrade  
j: Termindex

Summe der Produktmatrizen:

$$\mathbf{B}^i = \sum_{j=1}^i \mathbf{P}^{j,i} \dot{q}_j$$

Aus (4) folgt:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_0 = \mathbf{B}^i \vec{r}_i \quad (5)$$

## Kinetische Energie (I)

$$\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \quad \xrightarrow{\frac{d}{dm}} \quad d\mathbf{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \frac{d}{dt} \vec{r}_0 dm$$

Mit:  $\vec{v}^T \vec{w} = sp(\vec{v} \vec{w}^T) \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$

$$d\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} sp \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \right) dm$$

Mit (5) :

$$d\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T (\mathbf{B}^i)^T \right) dm$$

Integration über Masse  $m_i$  des Körpers  $K_i$  :

$$\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \int_{m_i} \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T dm (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

## Kinetische Energie (II)

$$\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \int_{m_i} \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T dm (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

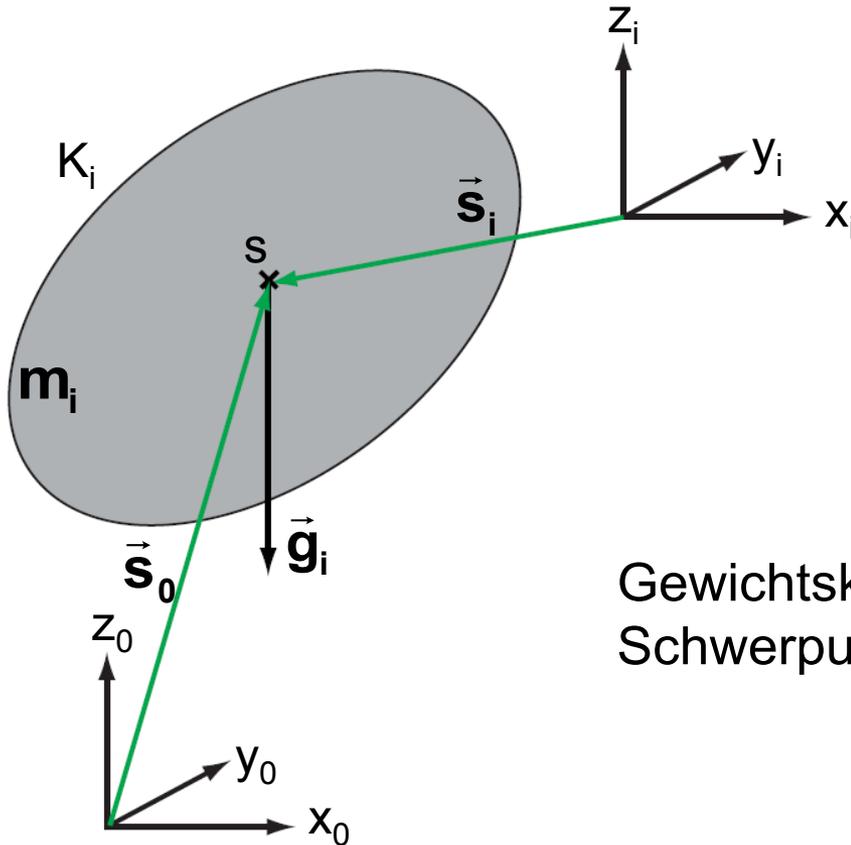
Fasse Integral als Matrix auf:  $\Theta^i = \int_{m_i} \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T dm$

$$\mathbf{E}_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} sp \left( \mathbf{B}^i \Theta^i (\mathbf{B}^i)^T \right)$$

Für die kinematische Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$\mathbf{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n sp \left( \mathbf{B}^i \Theta^i (\mathbf{B}^i)^T \right) \quad (6)$$

## Potentielle Energie



Gewichtskraft  $g_i$  wirkt auf Körper  $K_i$  im Schwerpunkt  $s$ .

## Potentielle Energie

$$E_{\text{pot},i} = m_i g h = -(\vec{g}_i)^T \vec{s}_0 \quad \text{wobei } (\vec{g}_i)^T = (0 \quad 0 \quad m_i g \quad 0)$$

Mit  $\vec{s}_0 = \mathbf{A}_{0,i} \vec{s}_i$  folgt:

$$E_{\text{pot},i} = -(\vec{g}_i)^T \mathbf{A}_{0,i} \vec{s}_i$$

Für die potentielle Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$E_{\text{pot}} = - \sum_{i=1}^n (\vec{g}_i)^T \mathbf{A}_{0,i} \vec{s}_i \quad (7)$$

## Lagrange Funktion

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{\text{kin}} - \mathbf{E}_{\text{pot}}$$

Mit (6) und (7) folgt:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ sp \left( \mathbf{B}^i \boldsymbol{\Theta}^i \left( \mathbf{B}^i \right)^T \right) + \left( \vec{\mathbf{g}}_i \right)^T \mathbf{A}_{0,i} \vec{\mathbf{s}}_i \right]$$

## Lagrange Bewegungsgleichung

$$\mathbf{Q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

Berechne  $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$  ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)$  ,  $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i}$  aus  $\mathbf{L}$ .

## Lagrange Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
 Q_i = & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \text{sp} \left[ \mathbf{P}^{i,k} \Theta^k (\mathbf{P}^{l,k})^T \right] \ddot{q}_l - \sum_{k=1}^n (\vec{g}_k)^T \mathbf{P}^{i,k} \vec{s}_k \\
 & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k \left[ \text{sp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} \mathbf{P}^{i,k} \Theta^k (\mathbf{P}^{l,k})^T + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} \mathbf{P}^{l,k} \Theta^k (\mathbf{P}^{i,k})^T \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_m} \mathbf{P}^{l,k} \Theta^k (\mathbf{P}^{m,k})^T \right] \dot{q}_l \dot{q}_m
 \end{aligned}$$

➔ n Gleichungen zusammengefasst in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\vec{q}) \ddot{\vec{q}} + \mathbf{n}(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) + \mathbf{g}(\vec{q})$$

## Zusammenfassung

Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen müssen nur die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden.

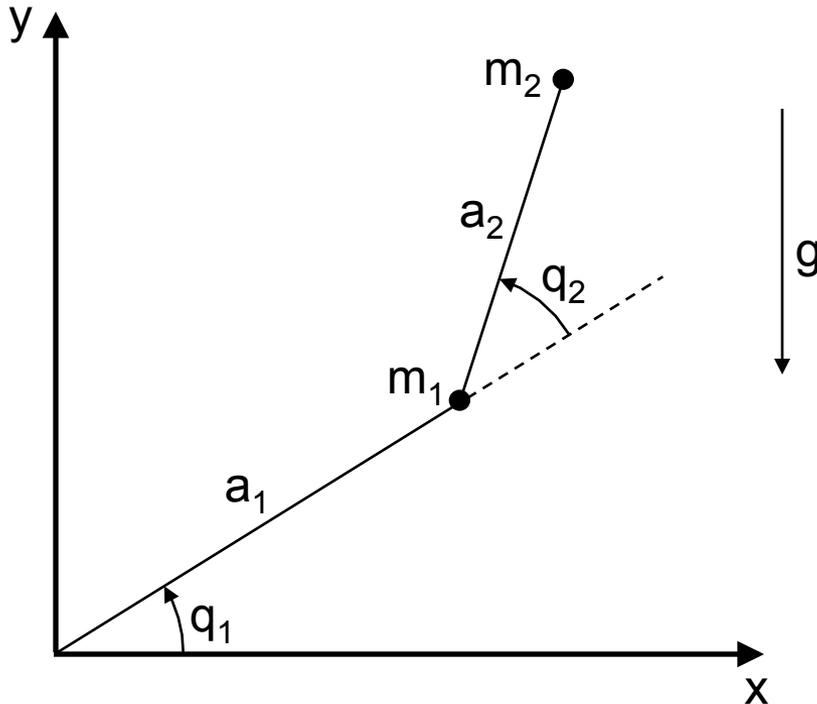
Die Bewegungsgleichungen folgen dann formal durch differenzieren:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

mit

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

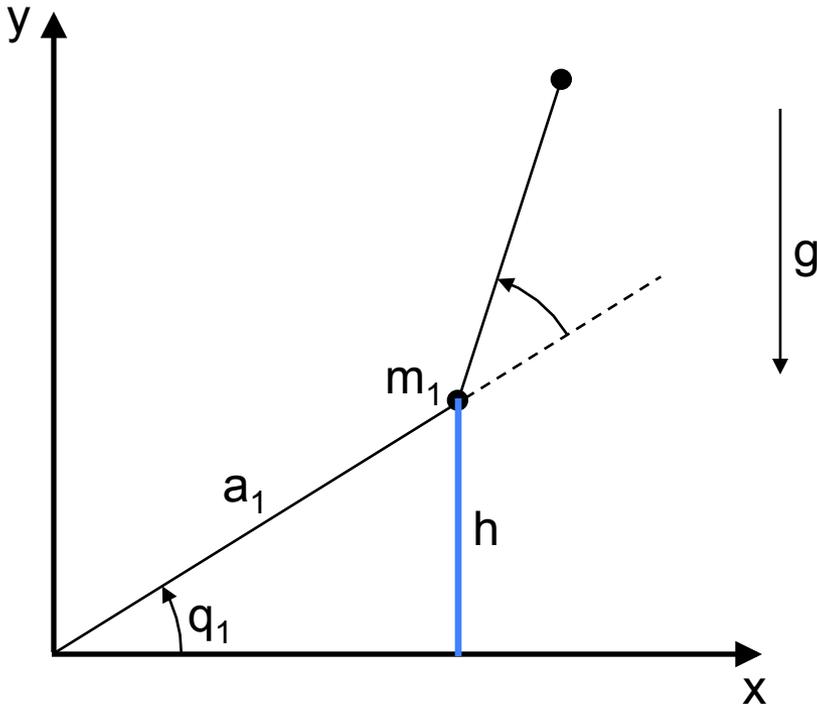
## Beispiel (I)



### Vereinfachung:

- Masse der Armelemente in  $m_1$  bzw.  $m_2$  zusammengefasst
- Keine Reibung

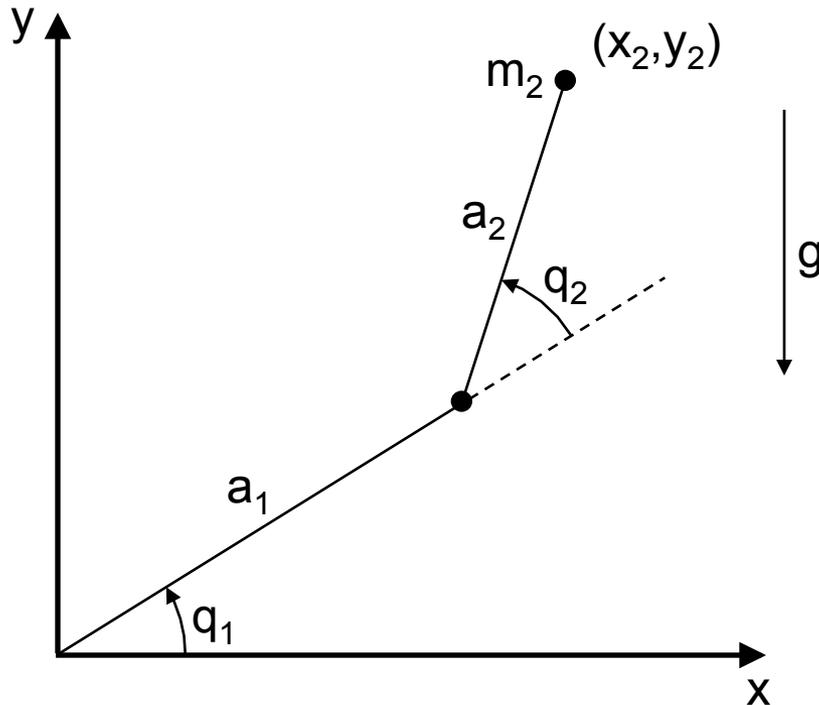
## Beispiel (II): Gelenk 1



$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$E_{\text{pot},1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$$

## Beispiel (III): Gelenk 2



Position:

$$x_2 = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)$$

Geschwindigkeit:

$$\dot{x}_2 = -a_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{y}_2 = a_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

## Beispiel (IV): Gelenk 2

Kinetische Energie:

$$\mathbf{v}_2^2 = \dot{\mathbf{x}}_2^2 + \dot{\mathbf{y}}_2^2 = \mathbf{a}_1^2 \dot{q}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

$$\mathbf{E}_{\text{kin},2} = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{a}_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{a}_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2)$$

Potentielle Energie:

$$\mathbf{E}_{\text{pot},2} = m_2 g y_2 = m_2 g [\mathbf{a}_1 \sin(q_1) + \mathbf{a}_2 \sin(q_1 + q_2)]$$

Lagrange Funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{E}_{\text{kin}} - \mathbf{E}_{\text{pot}} = \mathbf{E}_{\text{kin},1} + \mathbf{E}_{\text{kin},2} - \mathbf{E}_{\text{pot},1} - \mathbf{E}_{\text{pot},2} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \mathbf{a}_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{a}_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos(q_2) \\ &\quad - (m_1 + m_2) g \mathbf{a}_1 \sin(q_1) - m_2 g \mathbf{a}_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

## Beispiel (V): Bewegungsgleichung

Gelenk 1: 
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2\dot{q}_1 + m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1a_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2\ddot{q}_1 + m_2a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2a_1a_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos(q_2) - m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2)ga_1\cos(q_1) - m_2ga_2\cos(q_1 + q_2)$$

Gelenk 2: 
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1a_2\dot{q}_1\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2a_1a_2\ddot{q}_1\cos(q_2) - m_2a_1a_2\dot{q}_1\dot{q}_2\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2a_1a_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\sin(q_2) - m_2ga_2\cos(q_1 + q_2)$$

## Beispiel (VI): Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 + m_2a_2^2 + 2m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2a_2^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2) \\ m_2a_2^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2) \\ m_2a_1a_2\dot{q}_1^2\sin(q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)ga_1\cos(q_1) + m_2ga_2\cos(q_1 + q_2) \\ m_2ga_2\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Zusammengefasst:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\vec{\mathbf{q}})\ddot{\vec{\mathbf{q}}} + \mathbf{n}(\dot{\vec{\mathbf{q}}}, \vec{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\vec{\mathbf{q}})$$

## Eigenschaften

- einfaches Aufstellen der Gleichungen
- geschlossenes Modell
- analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich  $O(n^3)$   
( $n$  = Anzahl der Gelenke)
- nur Antriebsmomente werden berechnet

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

## Grundprinzip

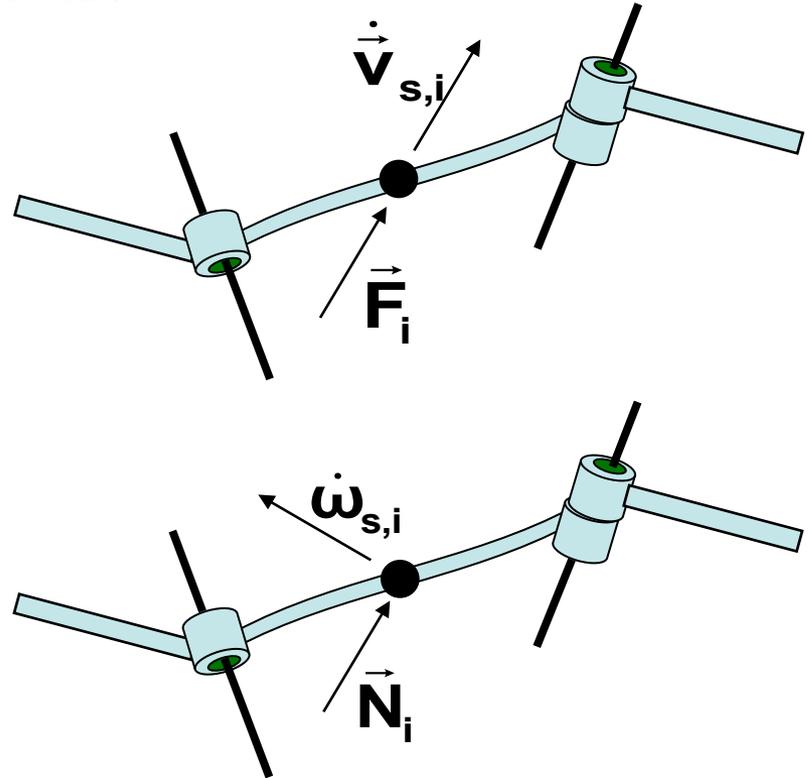
Betrachtung eines einzelnen Armelementes

### 2. Newtonsche Gleichung:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \dot{\vec{v}}_{s,i}$$

### Euler Gleichung: (Drallsatz)

$$\vec{N}_i = \vec{I}_i \cdot \dot{\vec{\omega}}_{s,i}$$



➔ Kräfte und Momente die auf ein Armelement wirken lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.

## Grundprinzip

### Verkettung der Armelemente

Die Beschleunigungen  $\dot{\mathbf{v}}_{s,i}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{s,i}$  eines Armelementes  $i$  hängen von den Beschleunigungen der vorhergehenden Armelemente ab.

⇒ Beschleunigungen können über kinematische Modell von der Basis zum Greifer rekursiv berechnet werden (**Vorwärtsgleichungen**).

Die Kräfte und Momente  $\vec{\mathbf{F}}_i$ ,  $\vec{\mathbf{N}}_i$ , die auf ein Armelement  $i$  wirken, hängen von den nachfolgenden Armelementen ab.

⇒ Kräfte und Momente können von Greifer zu Basis rekursiv berechnet werden (**Rückwärtsgleichungen**).

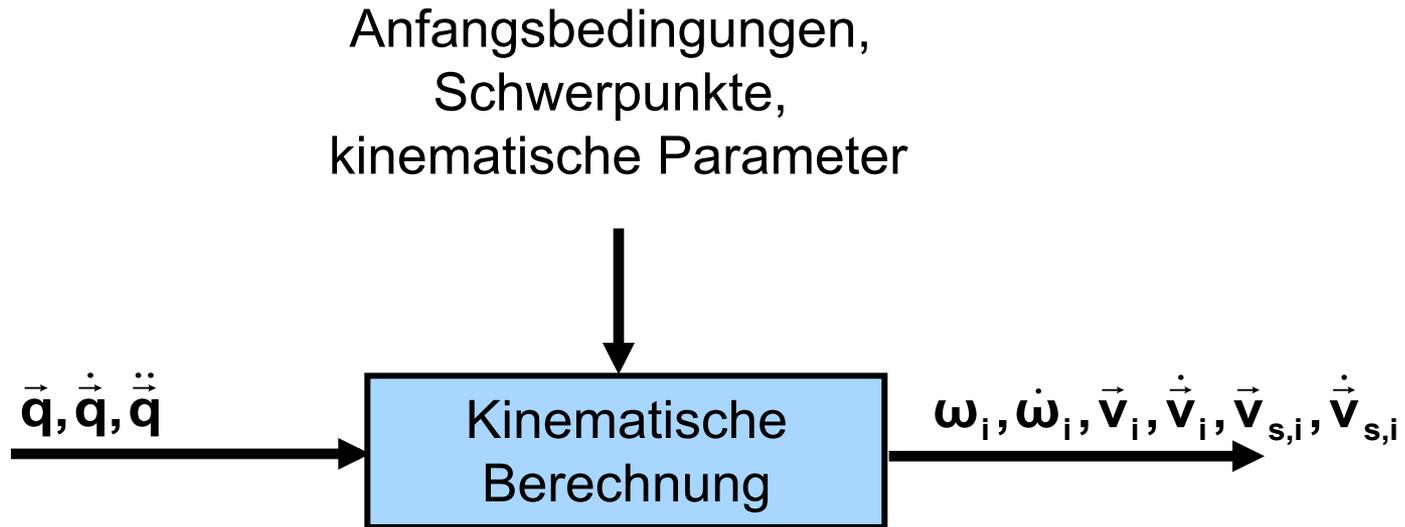
## Vorwärtsgleichungen

Aus dem kinematischen Robotermodell und dem Systemzustand lassen sich Winkelgeschwindigkeiten und translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gelenkes und Armelementes  $i$  im Basiskoordinatensystem bestimmen.

Bestimmt werden:

- Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_i$
- Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$
- Geschwindigkeit  $\vec{\mathbf{v}}_i$  und Beschleunigung  $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_i$  der Basen der Koordinatensysteme
- Geschwindigkeiten  $\vec{\mathbf{v}}_{s,i}$  und Beschleunigungen  $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{s,i}$  der Massenmittelpunkte der Armteile

## Vorwärtsgleichungen



Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für Armelement  $i+1$  lassen sich **rekursiv** unter Berücksichtigung der Kinematik aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Armelementes  $i$  berechnen.

## Vorwärtsgleichungen

Eingabedaten  
 $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$



Rekursive Berechnung der Kinematik von der Basis zum Greifer (Vorwärtsgleichungen)

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \mathbf{G}_1(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = \mathbf{G}_2(\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{i+1}, \ddot{\mathbf{q}}_{i+1})$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{G}_3(\vec{\mathbf{v}}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

$$\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{i+1} = \mathbf{G}_4(\dot{\vec{\mathbf{v}}}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \mathbf{q}_{i+1})$$

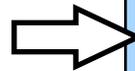
$$\vec{\mathbf{v}}_{s,i+1} = \mathbf{G}_5(\vec{\mathbf{v}}_{i+1}, \boldsymbol{\omega}_{i+1})$$

$$\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{s,i+1} = \mathbf{G}_6(\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{i+1}, \boldsymbol{\omega}_{i+1}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1})$$



Startwerte der  
Rekursionsformeln

$$\boldsymbol{\omega}_0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \vec{\mathbf{v}}_0, \dot{\vec{\mathbf{v}}}_0$$



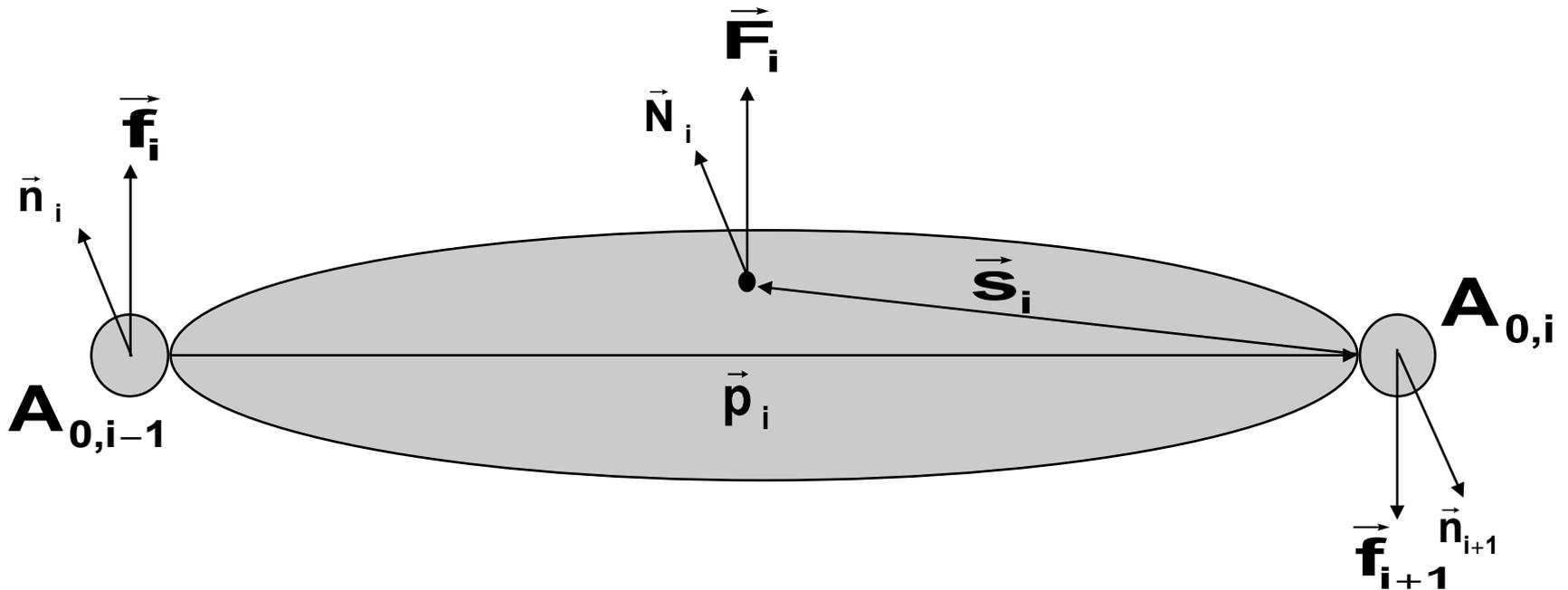
## Rückwärtsgleichungen

Beginnend vom Greifer des Roboters lassen sich die dynamische Größen des Systems rekursiv bis zur Basis berechnen. Dabei werden die im Vorwärtsschritt berechneten Größen verwendet.

Folgende dynamische Größen werden bestimmt:

- auftretende Kraft  $\vec{F}_i$  im Schwerpunkt von Armelement  $i$
- auftretender Drehimpuls  $\vec{N}_i$  im Schwerpunkt von Armelement  $i$
- Kraftvektor  $\vec{f}_i$  ausgeübt von Armteil  $i-1$  auf Armteil  $i$
- Momentenvektor  $\vec{n}_i$  ausgeübt von Armteil  $i-1$  auf Armteil  $i$
- skalarer Drehmomentvektor des  $i$ -ten Gelenks  $Q_i$

## Rückwärtsgleichungen



## Rekursive Berechnung der dynamischen Größen

Unter Verwendung des Kraft-Momenten-Satzes:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \dot{\vec{v}}_{s,i} = \vec{f}_i - \vec{f}_{i+1}$$

und des Drehimpulssatzes:

$$\vec{N}_i = \vec{I}_i \dot{\vec{\omega}}_i = \vec{n}_i - \vec{n}_{i+1} + (-\vec{s}_i - \vec{p}_i) \times \vec{F}_i - \vec{p}_i \times \vec{f}_{i+1}$$

aus Vorwärtsgleichungen

können rekursiv die dynamischen Größen des Armteils  $i$  berechnet werden.

$m_i$  : Masse des Armelements  $i$

$\vec{I}_i$  : Massenträgheitsmoment

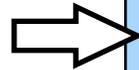
$\vec{\omega}_i, \vec{s}_i, \vec{p}_i, \dot{\vec{v}}_i$  : bereits definiert in geometrischer Beschreibung

## Rückwärtsgleichungen

Externe Kräfte und Momente an Endeffektor als Startwerte

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{EX}$$

$$\vec{N}_n = \vec{N}_{ex}$$



Rekursive Berechnung der Dynamik vom Greifer zur Basis (Rückwärtsgleichungen)

$$\vec{F}_i = H_1(\dot{\vec{v}}_{s,i})$$

$$\vec{N}_i = H_2(\omega_i, \dot{\omega}_i, q_i, \dot{q}_i)$$

$$\vec{f}_i = H_3(\vec{f}_{i+1}, \vec{F}_i, q_{i+1})$$

$$\vec{n}_i = H_4(\vec{n}_{i+1}, \vec{f}_{i+1}, \vec{F}_i, \vec{N}_i, q_{i+1})$$

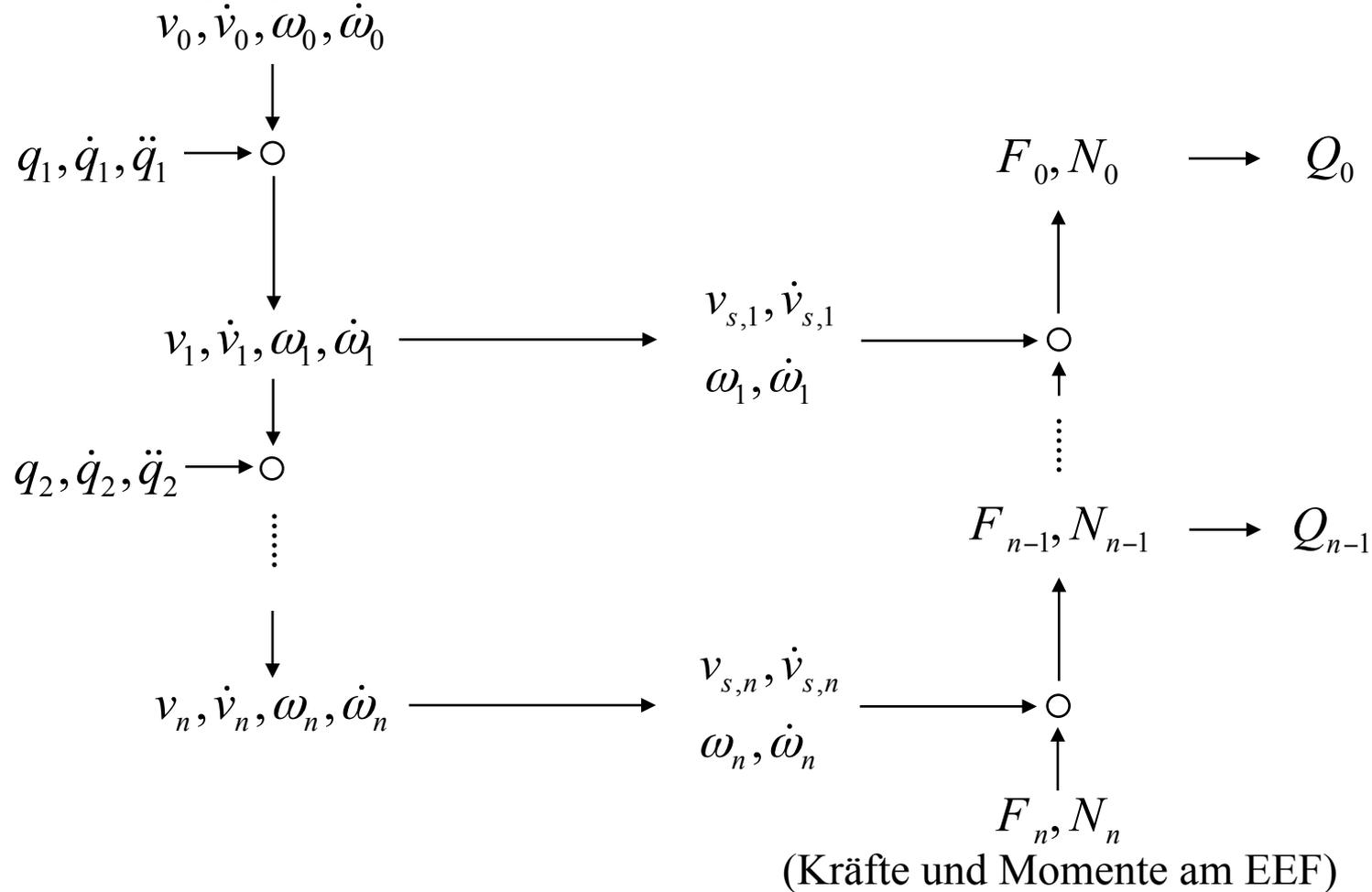
$$Q_i = H_5(\vec{n}_i, q_i)$$



$Q(t)$

## Zusammenfassung

(Bewegung der Basis)



## Eigenschaften

- für beliebige Anzahl von Gelenken
- Belastungen der Armelemente werden berechnet
- Aufwand  $O(n)$  ( $n$  = Anzahl der Gelenke)
- Rekursion

# VI. Robotermodellierung II

Ende